Ion Pătraşcu Nicolae Ivăşchescu

GEOMETRIE

Clasa a 8-a

după noua programă de gimnaziu

- **TIPURI DE PROBLEME**
  - repere teoretice
  - probleme rezolvate
  - probleme propuse – rezolvări complete
- **PERFORMANȚĂ**
  - olimpiade și concursuri școlare

EDITURA CARMINIS educațional

CUPRINS

TEMA 1

NOŢIUNILE PRIMARE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU ŞI RELAŢII ÎNTRE ELE

A. Noțiuni teoretice

1. Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu

Ca și geometria plană, geometria în spațiu operează cu noțiuni primare. Acestea sunt: puncte, drepte, plane și, evident, spațiul.

Spre deosebire de geometria plană în care „acțiunea“ se petrece în plan – înțelegând prin acesta planul foii de hârtie pe care lucrăm sau planul tablei sau desktopul laptopului, în geometria în spațiu „acțiunea“ se desfășoară în spațiu, înțelegând prin acesta mulțimea tuturor punctelor care ne înconjoară (mai bine zis existente, evident și punctele ocupate de corpul nostru).

Vom nota spațiul cu S, înțelegând prin spațiu mulțimea tuturor punctelor. Planele vor fi notate cu litere mici grecești α, β, γ, δ, ... și vor fi reprezentate ca în figura 1.

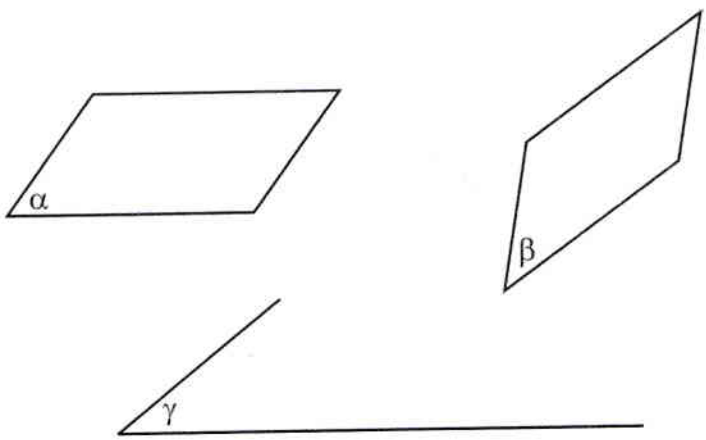


Figura 1

Dreptele se notează cu litere mici ale alfabetului a, b, c, ... Punctele se notează cu litere mari ale alfabetului A, B, C, ...

2. Câteva dintre axiomele geometriei în spațiu

Axiomele sunt propoziții adevărate care nu se demonstrează, adevărul lor fiind acceptat pe baza intuiției, evidenței și a modelelor din practică. Axiomele geometriei plane sunt evident adevărate și în spațiu. Amintim câteva dintre acestea.

A_1. Două puncte distincte determină o dreaptă și numai una.

A_2. Dacă o dreaptă are două puncte conținute într-un plan, atunci toate punctele dreptei sunt în acel plan.

A_3. **(Axioma lui Euclid).** Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, se poate construi o singură paralelă la acea dreaptă.

A_4. Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul.

A_5. Există patru puncte necoplanare (nesituate în același plan).

În figura 2 sunt reprezentate 4 puncte necoplanare.

Punctele B, C, D determină un plan, îl notăm (BCD), iar punctul A nu aparține planului (BCD), deci este exterior planului.

Așa cum un punct ce aparține unei drepte determină pe dreaptă două semidrepte și așa cum o dreaptă aflată într-un plan determină în acesta două semiplane opuse, și un plan determină în spațiu două semispații. Planul este în acest caz frontiera semispațiilor.

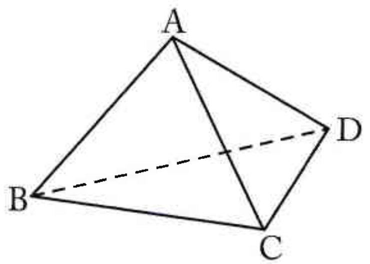


Figura 2

A_6. Orice punct din spațiu care nu aparține planului α aparține unuia dintre semispațiile de frontieră α.

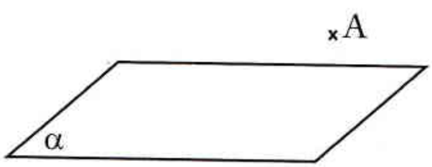


Figura 3

Dacă α este un plan și A este un punct, $A \notin \alpha$, notăm semispațiul de frontieră α care conține punctul A astfel $[\alpha A$ (vezi fig. 3).

Celălalt semispațiu de frontieră α se numește semispațiul opus lui $[\alpha A$.

3. Relații între noțiunile primare ale geometriei în spațiu

Relațiile între puncte, drepte, plane și spațiu sunt în general relații de apartenență, non-apartenență, incluziune, non-incluziune, incidență, identitate, paralelism.

În strânsă legătură cu relațiile dintre două noțiuni fundamentale este și poziția pe care o ocupă unul (una) față de altul (alta).

Astfel avem:

- **Relații între două puncte**

Două puncte pot fi **distincte** (diferite) și notăm $A \neq B$ sau **confundate** (identice) și notăm $A = B$.

- **Relații între punct și dreaptă**

Un punct poate să aparțină dreptei și notăm $A \in a$ (vezi fig. 4) sau să nu aparțină dreptei (să fie exterior dreptei) și notăm $B \notin a$.

Figura 4

Evidențiem că un punct exterior unei drepte și dreapta respectivă determină un plan unic. Notăm $\alpha = (a, A)$ planul determinat de dreapta a și punctul A, exterior ei.

- **Relații între două drepte**

Ca și în plan, în spațiu două drepte care au în comun două puncte distincte **coincid**. (Aceasta este o consecință a axiomei $\mathbf{A_1}$.)

În figura 5, dreapta a și dreapta AB coincid pentru că $A \in a$, $B \in a$ și $A \neq B$.

Figura 5

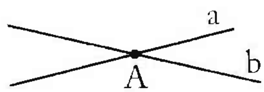


Figura 6

De asemenea, două drepte care au un singur punct comun se numesc **concurente**.

În figura 6 dreptele a și b au punctul A comun. Subliniem că două drepte concurente determină un plan. Notăm $\alpha = (a, b)$ planul determinat de dreptele concurente a și b.

În privința a două drepte în spațiu care nu au niciun punct comun, avem două situații:

• Două drepte care nu au niciun punct comun și sunt paralele se numesc **drepte coplanare.**

• Două drepte care nu au niciun punct comun dar nu sunt paralele se numesc **drepte necoplanare.**

În figura 7 dreptele a și b sunt paralele și notăm $a \parallel b$. Dacă a și b sunt drepte paralele, atunci ele determină un plan. Notăm cu $\alpha = (a, b)$ planul determinat de dreptele a și b. Tot în figura 7 dreptele c și d sunt necoplanare $c \cap d = \varnothing$ și nu există un plan α astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \alpha$.

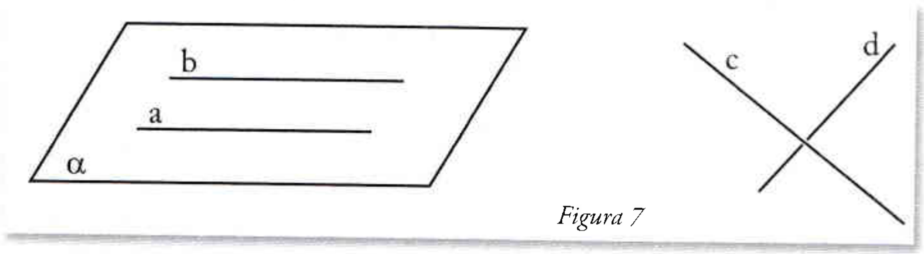


Figura 7

• **Relații între o dreaptă și un plan**

Axioma A_2 evidențiază faptul că dacă dreapta a și planul α au în comun două puncte distincte, atunci dreapta este inclusă în plan.

În figura 8 dreapta a are în comun cu planul α punctele distincte A și B. Atunci $a \subset \alpha$, deci $\forall P \in a \Rightarrow P \in \alpha$.

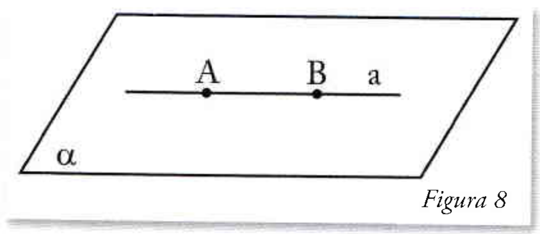


Figura 8

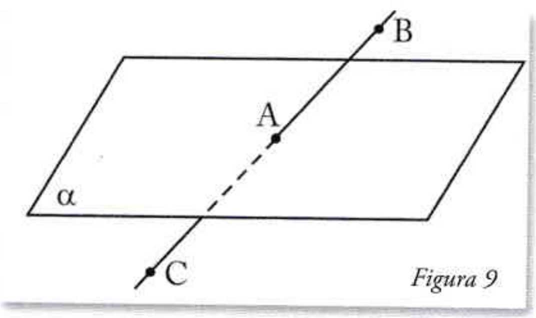


Figura 9

• O dreaptă poate să aibă cu un plan un singur punct comun.

De exemplu: Dacă punctul B este în semispațiul $[\alpha B$ și punctul C este în semispațiul opus, atunci dreapta BC va intersecta planul α într-un singur punct A. Spunem că dreapta BC înțeapă planul α (vezi figura 9). Avem $BC \cap \alpha = \{A\}$.

• O dreaptă a poate să nu aibă cu planul α niciun punct comun. În acest caz spunem că dreapta a este paralelă cu planul α. Notăm $a \parallel \alpha$, avem $a \cap \alpha = \varnothing$ (vezi figura 10).

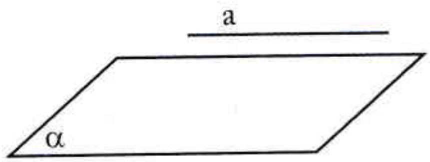


Figura 10

• Relații între plane

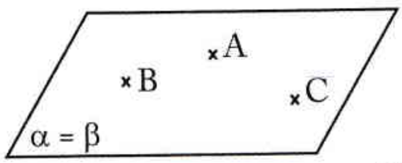


Figura 11

• O consecință a axiomei A_4 arată că dacă două plane au în comun trei puncte necoliniare, atunci ele **coincid**.

Deci, dacă A, B, C sunt puncte necoliniare, $A, B, C \in \alpha$ și $A, B, C \in \beta$, atunci $\alpha = \beta$ (vezi figura 11).

• Două plane care nu au niciun punct comun se numesc **plane paralele**.

În figura 12 planele α și β sunt paralele și notăm $\alpha \parallel \beta$ cu $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

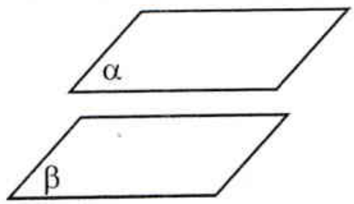


Figura 12

✪ **Teorema 1.** Dacă două plane distincte au în comun un punct, atunci ele au o dreaptă comună.

Ipoteză: $\begin{cases} \alpha, \beta, \alpha \neq \beta \\ A \in \alpha, A \in \beta \end{cases}$ *Concluzie:* Există $B \in \alpha$ și $B \in \beta$.

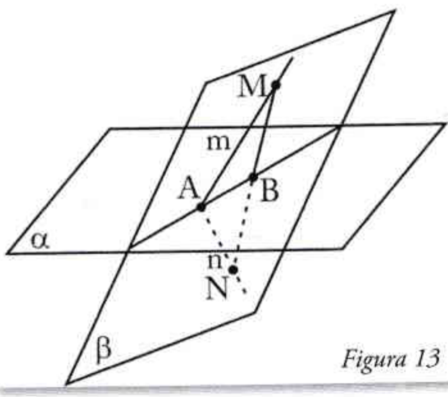


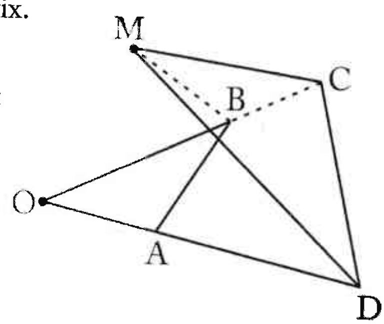
Figura 13

Demonstrație: Fie A punctul comun celor două plane, $A \in \alpha \cap \beta$. Considerăm în planul β semidreptele m și n de origine A situate în semispațiile opuse de frontieră α (vezi figura 13). Pe semidreapta m considerăm punctul M, iar pe semidreapta n considerăm punctul N. Conform axiomei A_1 rezultă că $MN \subset \beta$. Pe de altă parte, punctele M și N fiind în semispații opuse, dreapta MN „înțeapă" planul α într-un punct B. Cum $B \in MN \subset \beta$, rezultă că $B \in \beta$, prin urmare $B \in \alpha \cap \beta$. Dreapta AB se numește intersecția planelor α și β. Despre planele α și β se spune că sunt **secante**.

B. Probleme rezolvate

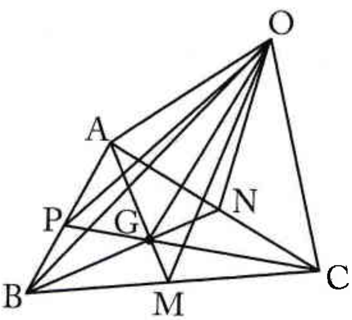
1. Fie ABCD un patrulater convex în care laturile opuse BC și AD nu sunt paralele, iar M un punct variabil nesituat în planul patrulaterului. Arătați că planele (MAD) și (MBC) trec printr-un punct fix.

Rezolvare



Planele (MAD) și (MBC), având un punct comun, M, au o dreaptă comună. Deoarece $AD \cap BC = \{O\}$ (vezi figura), $O \in (MAD) \cap \cap (MBC)$ și cum O este un punct fix în planul (ABC), acesta este punctul căutat.

2. Fie ABC un triunghi, M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB și O un punct arbitrar în exteriorul planului (ABC). Arătați că planele (OAM), (OBN) și (OCP) au o dreaptă comună.



Rezolvare

Dreptele AM, BN, CP sunt medianele triunghiului ABC. Aceste drepte sunt concurente în G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Având $G \in AM$ și $AM \subset (OAM)$, rezultă $G \in (OAM)$. În mod analog se demonstrează că $G \in (OBN)$ și $O \in (OCP)$. Dreapta comună planelor (OAM), (OBN), (OCP) (intersecția lor) este dreapta OG.

3. Se dau n puncte în spațiu $A_1, A_2, ..., A_n$, oricare trei necoliniare. Aflați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că numărul de drepte determinate de cele n puncte este egal cu numărul de plane determinate de cele n puncte. *Ion Pătrașcu*

Rezolvare

Dacă considerăm fixat punctul A_1, el formează cu celelalte $n-1$ puncte, $n-1$ drepte $(A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_{n-1}, A_1A_n)$. Repetând raționamentul pentru $A_2, A_3, ..., A_n$, vom obține de asemenea câte $n-1$ drepte. Deoarece în acest proces de numărare a dreptelor, fiecare dreaptă a fost numărată de două ori, numărul total de drepte $n_d = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

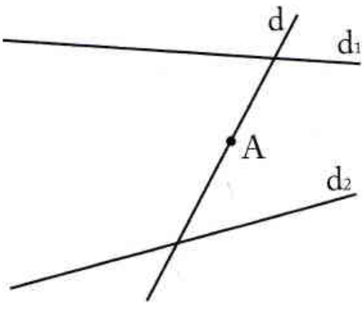
Să considerăm acum o dreaptă fixată, de exemplu A_iA_j, $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$ și punctul A_k, $i \neq j \neq k$. Odată fixată dreapta, punctul A_k poate fi ales în $n-2$

moduri. Punctele A_i, A_j, A_k formează un plan $\left(A_iA_jA_k\right)$. Deoarece am stabilit că sunt $\dfrac{n(n-1)}{2}$ drepte, dreapta A_iA_j poate fi aleasă în $\dfrac{n(n-1)}{2}$ moduri. Numărul de plane determinate va fi $n_p=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ (numărul 6 de la numitor a fost obținut prin împărțirea cu 3 a numărului $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ plane de tipul $\left(A_iA_jA_k\right)$ pentru că acestea din urmă au fost numărate de 3 ori).

Problema cere să găsim $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 3$ pentru care $n_d=n_p \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}=$ $=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Obținem $\dfrac{n(n-1)}{2}\left(\dfrac{n-2}{3}-1\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-5)}{6}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n=5$.

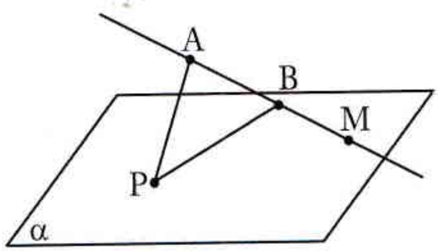
4. Arătați că dacă d_1 și d_2 sunt două drepte necoplanare și A este un punct în spațiu care nu aparține dreptelor, atunci există o dreaptă d care conține punctul A și intersectează dreptele d_1 și d_2.

Rezolvare



Punctul A și dreapta d_1 determină un plan α. În acest plan sunt conținute toate dreptele care trec prin A și întâlnesc dreapta d_1, precum și dreapta care trece prin A și este paralelă cu d_1. Fie $\beta=\left(A,\ d_2\right)$. Planele α și β având A un punct comun, au o dreaptă d comună. Această dreaptă d trece prin A și întâlnește d_1 și d_2.

5. Fie A și B două puncte situate în același semispațiu ce are frontiera planul α, dreapta AB nu este paralelă cu α. Aflați un punct M în planul α astfel încât $|MA-MB|$ să fie maximă.



Rezolvare

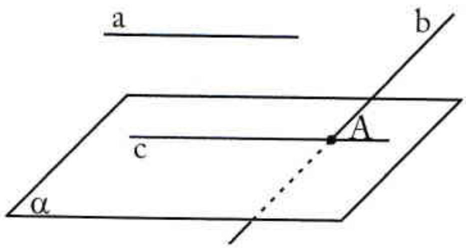
Fie $P\in\alpha$. În triunghiul PAB, $|PA-PB|<AB$. Dacă $AB\cap\alpha=\{M\}$, avem $|MA-MB|=AB$, în consecință punctul M este intersecția dreptei AB cu planul α.

6. Fie A, B, C, D puncte distincte în spațiu, astfel încât $AB = AC = AD = BC = CD = BD$. Demonstrați că punctele A, B, C, D nu pot fi toate în același plan.

Rezolvare

Presupunem prin absurd că A, B, C, D sunt puncte situate în același plan. Atunci triunghiul ABC este echilateral $(AB = BC = AC)$ și, având $AD = DB = DC$, punctul D este centrul cercului circumscris acestui triunghi. Deoarece ΔABC este ascuțitunghic, înseamnă că D este în interiorul lui. Din $DA = DB = AB$ avem că ΔDAB este echilateral, deci $m(\widehat{ADB}) = 60°$. Din $DB = DC = BC$ rezultă că ΔDBC este echilateral, deci $m(\widehat{BDC}) = 60°$. Din $DA = DC = AC$ rezultă că ΔDAC este echilateral, deci $m(\widehat{CDA}) = 60°$. Am obținut că suma măsurilor unghiurilor $\widehat{ADB}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{CDA}$ (unghiuri în jurul unui punct) este de $180°$, contradicție! Presupunerea făcută este falsă, deci A, B, C, D sunt necoplanare.

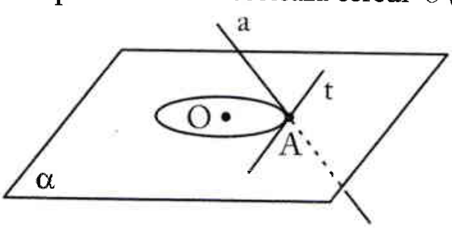
7. Fie α un plan dat, a o dreaptă paralelă cu α și b o dreaptă astfel încât $b \cap \alpha = \{A\}$. Construiți prin a și prin b câte un plan astfel încât dreapta lor de intersecție să fie conținută în α.



Rezolvare

Prin punctul A se construiește paralela c la dreapta a, $c \subset \alpha$. Notăm $\beta = (a, c)$ și $\gamma = (b, c)$. Dreapta cerută este chiar c.

8. Cercul $\mathscr{C}(O)$ este situat în planul α, iar dreapta a înțeapă planul α într-un punct A nesituat în interiorul cercului $\mathscr{C}(O)$. Construiți prin dreapta a un plan care intersectează cercul $\mathscr{C}(O)$ într-un singur punct. *Ion Pătrașcu*

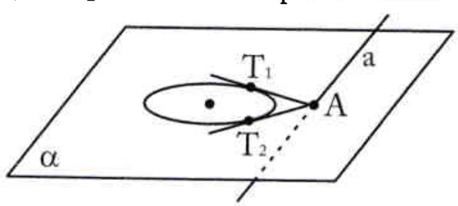


Rezolvare

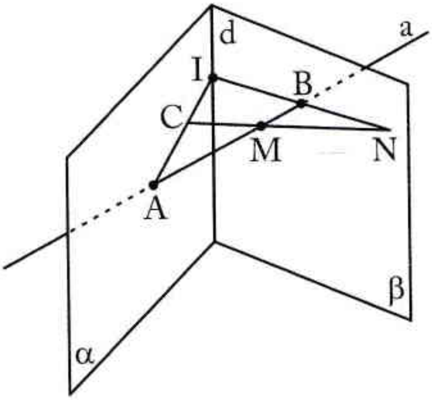
Sunt de analizat două cazuri:

1. Punctul $A \in \mathscr{C}(O)$. În acest caz construim tangenta t în A la cerc. Această dreaptă t și dreapta a determină planul căutat.

2. Punctul A este în exteriorul cercului. Construim tangentele AT_1 și AT_2 la cercul $\mathscr{C}(O)$. Planele $\beta = (T_1, a)$ și $\gamma = (T_2, a)$ sunt soluții ale problemei.



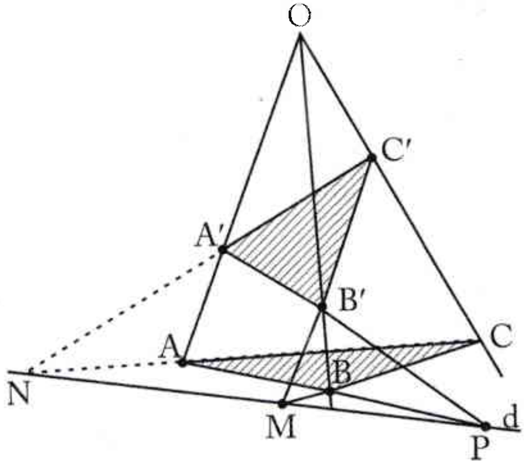
9. Fie α și β două plane secante a căror intersecție este dreapta d. O dreaptă a intersectează planul α în punctul A și planul β în punctul B. În planul α se consideră punctul C astfel încât dreptele AC și d nu sunt paralele. Dacă M este un punct mobil pe (AB) și $CM \cap \beta = \{N\}$, arătați că dreptele AC și BN se intersectează pe dreapta d.



Rezolvare

Notăm $\{I\} = AC \cap d$ și notăm $\gamma = (AIB)$. Avem $C \in AI \subset \gamma$, deci $C \in \gamma$ (1). $M \in (AB) \subset \gamma$, deci $M \in \gamma$ (2). Din (1) și (2) rezultă $CM \subset \gamma$. Deoarece $N \in CM$ rezultă $N \in \gamma$. Dar $N \in \beta$, $I \in \beta$. Rezultă că $\gamma \cap \beta = IN$. Cum $B \in \beta$ și $B \in \gamma$, rezultă că $B \in IN$, prin urmare $AC \cap BN = \{I\} \in d$.

10. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sunt astfel situate încât dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct O și $BC \cap B'C' = \{M\}$, $CA \cap C'A' = \{N\}$, $AB \cap A'B' = \{P\}$. Demonstrați că punctele M, N, P sunt coliniare. (Teorema lui G. Desargues – 1636)



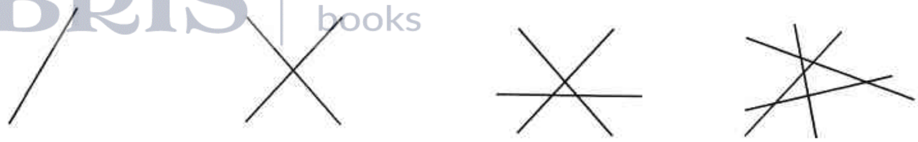
Rezolvare

Planele (ABC) și $(A'B'C')$ având punctul M comun ($M \in BC \subset (ABC)$, $M \in B'C' \subset (A'B'C')$) au o dreaptă comună – dreapta lor de intersecție. Notăm $d = (ABC) \cap (A'B'C')$. Cum $N \in (ABC) \cap (A'B'C')$ și $P \in (ABC) \cap (A'B'C')$ (același raționament ca în cazul lui M) avem că M, N, P aparțin dreptei d, deci sunt coliniare.

11. Să se afle numărul maxim de regiuni în care se poate împărți planul în care sunt considerate n drepte, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare

Vom nota cu r_n numărul maxim de regiuni în care împart planul n drepte conținute în plan. Observăm că dacă $n = 1$, $r_1 = 2$. Dacă $n = 2$, $r_2 = 4$ etc.



$n=1;\ r_1=2$ $n=2;\ r_2=4$ $n=3;\ r_3=7$ $n=4;\ r_4=11$

De asemenea, **observăm că:**

1. În configurația căutată nu putem avea drepte paralele deoarece acestea reduc numărul de regiuni. Într-adevăr, două drepte paralele formează în plan trei regiuni, pe când două drepte concurente formează în plan patru regiuni.

2. În configurația cu număr maxim de regiuni nu vor exista trei drepte care trec prin același punct, deoarece astfel am „pierde“ o regiune în formă de triunghi format din punctele de intersecție a dreptelor.

Așa cum am afirmat, fie r_n numărul maxim de regiuni formate în plan de n drepte. Presupunând acest număr cunoscut, să observăm cum obținem r_{n+1} dacă mai adăugăm la configurația cu n drepte o altă dreaptă. Această nouă dreaptă va fi intersectată de celelalte n în n puncte distincte. Fiecare segment de dreaptă și semidreaptă în care este împărțită noua dreaptă (a, $(n+1)-a$ dreaptă) determină într-o regiune veche două regiuni noi, prin urmare $r_{n+1}=r_n+n+1$.

Așadar, vom avea: $r_n=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+r_1$. Dar $r_1=2$ și folosind formula $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, găsim $r_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+1$.

C. Probleme propuse (1)

1. Câte plane se pot construi:

a) printr-un punct;

b) prin două puncte;

c) prin trei puncte coliniare;

d) prin trei puncte necoliniare;

e) prin patru puncte dintre care trei sunt coliniare?

2. Dreapta d „înțeapă“ planul α în punctul A. Construiți în planul α punctele B și C care determină cu d un plan β. Ce puteți afirma despre intersecția planelor α și β?

3. Un cerc și un plan au în comun două puncte. Putem afirma că cercul este inclus în plan? Dar dacă cercul și planul au în comun trei puncte?